

研究報告

板の曲げ問題に対する数値解析

学習院大学理学部教授 水谷 明

1 概要

上から見て六角形（図1）の薄い板があるものとする（図2）。境界（六角形のすべての辺）をがっちり固定して、板の面に垂直な力 f を加えると、板は変形して曲がる。変形の様子を誇張して描くと図3のようになり、特に線分 AB に沿った変形は図4のような形になる。点 A より点 B の方が曲がり具合が大きいことに注意してほしい。一般に、角の点は変形が大きく、また、角の中でも内角の大きい角の点の方が大きく変形する。

力 $f = f(x, y)$ が与えられたとき、曲がり具合を表す変位 $u = u(x, y)$ は、微小変形である限り、適当な単位のもとで、次の重調和ディリクレ問題の解になることが知られている：

$$\Delta^2 u = f \quad (\Omega \text{ 内で}), \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\Omega \text{ の境界 } \partial\Omega \text{ 上}) \quad (1)$$

ここでは、 Ω は（必ずしも凸とは限らない）多角形領域と仮定する。また、 Δ はラプラス作用素： $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、 n は境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルであり、 $f(x, y)$ は Ω で2乗可積分な関数とする。

各 f に対して (1) の解 u はただ一つある。しかし、どのような形をしているかは分からない。そこで、有限要素法という近似解法を用いて、(1) の近似解を構成する。

例として、 Ω が図1の六角形の場合を考えよう。

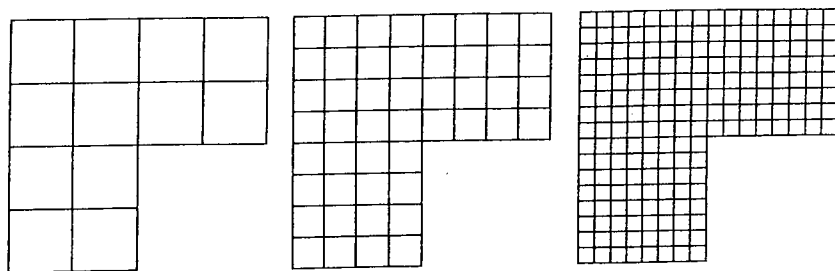


図5

図5のように、 Ω を小さい正方形（要素という）に分割する。左から、 $h = 1/4, 1/8, 1/16$ と分割を細かくしていく。 h は分割の細かさを表すパラメーターである。

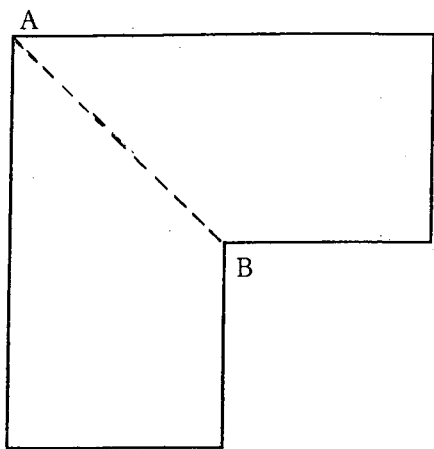


図 1

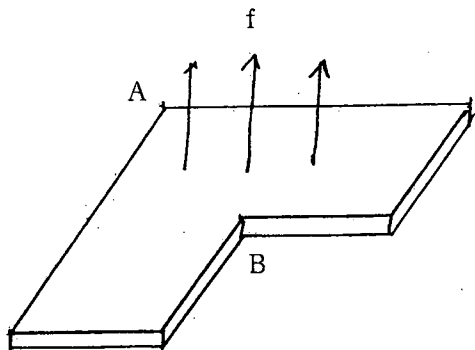


図 2

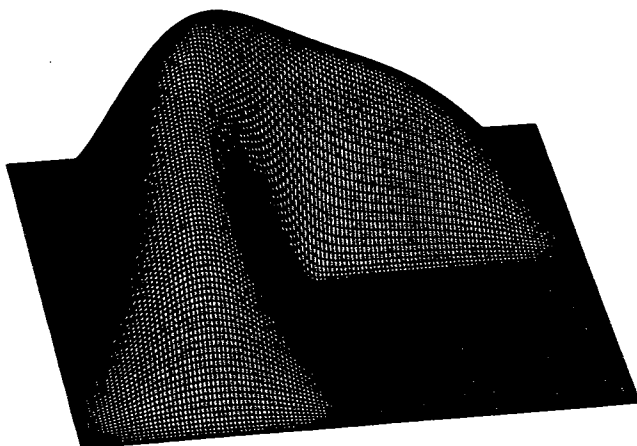


図 3

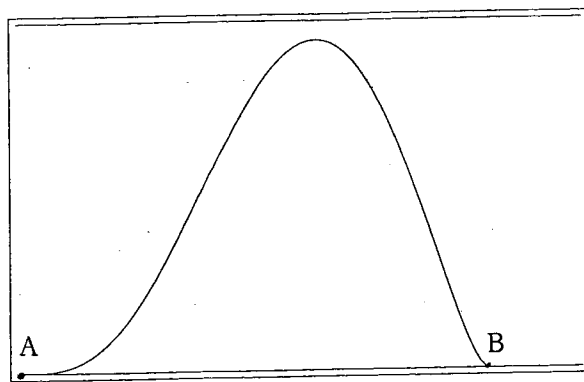


図 4

各分割に対して、

- ・ Ω 全体で連続微分可能で、
- ・ 境界では、1 階微分も込めて 0 となり、
- ・ 各正方形要素の中では、 x, y について 3 次式

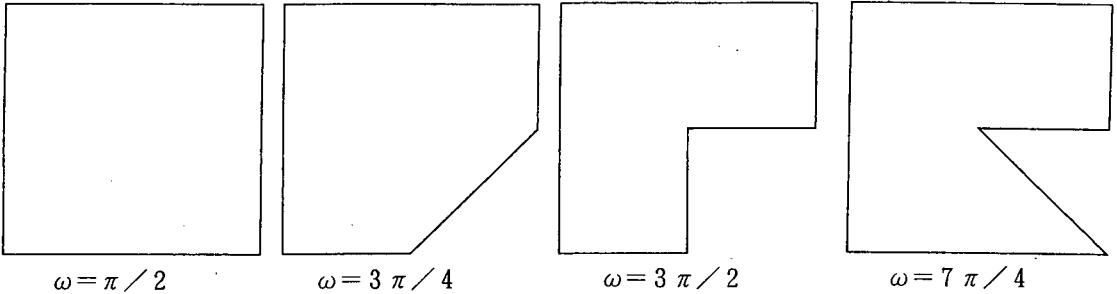
という関数の中から、ある規則に従って、近似解（有限要素解という）を作る。

これにより、各 $h > 0$ に対して、有限要素解 $u_h(x, y)$ が 1 つ定まる。

本報告では次のことを示したい。

1°. 解（弱解）の滑らかさ

Ω の最大内角を ω とする。 ω が大きくなるにつれて、弱解 u の滑らかさは減少していく。滑らかさの減少はより大きな変形に対応する。例えば、 Ω の形が次の 4 つの場合：



上に述べたことは、右の領域ほど大きく変形しやすいことを示している。

しかし逆に、 Ω がどんな多角形領域でも、弱解は、少なくとも $W_2^{5/2}(\Omega)$ に属することは保障されている。感覚的に言うと 2.5 回微分まで 2 乗可積分である。

2°. 有限要素解の（ほぼ）最適な収束の速さ

分割が細かくなる ($h \rightarrow 0$) につれて、有限要素解 $u_h(x, y)$ は本当の解 $u(x, y)$ に近づいていく。1° の結果に基づき、その収束の速さを Ω の最大内角 ω に応じて決定することが出来た。 ω が大きくなるにつれて、収束は遅くなっていく。

3°. 実際の数値計算 で、2° の妥当性が確認できた。

以上の 1°、2°、3° を順次述べていきたい。

2 弱解の滑らかさ

u が (1) の弱解とは、

$$(\Delta u, \Delta v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

$((\cdot, \cdot)$ は L^2 内積) を満たす $u \in H_0^2(\Omega)$ のことである。

Ω が滑らかな境界をもつ領域の場合、弱解 u は $H^4(\Omega)^1$ に属することが知られている。しかし、多角形領域の場合は角の点があるため、弱解の滑らかさは悪くなる。

弱解の滑らかさは、Kondratiev[3], Grisvard[2]の研究から、 τ に関する方程式

$$\sinh^2(\tau\omega) = \tau^2 \sin^2 \omega, \quad (2)$$

により決定されることが知られている。 $\tau = -i$ は ω の値に関係なく、いつでも (2) の解である。 $-i$ 以外の解で、帯状領域 $D = \{\tau \in \mathbb{C} \mid -2 < \text{Im } \tau < 0\}$ の中にあるものの全体を S_ω とする： $S_\omega = \{\tau \in D \mid \tau \neq -i, \sinh^2(\tau\omega) = \tau^2 \sin^2 \omega\}$ 。

[3],[2] の結果に基づき computer で計算したところ、次のことが分かった。

(i) 絶対定数 $\kappa (\approx 0.701576\pi)$ が存在して、 Ω の内角の最大値 ω が κ より小であれば $S_\omega = \phi$ で、弱解 u は $H^4(\Omega)$ に属す。従って、この場合は、弱解の滑らかさは悪くならない。特に、 Ω が長方形 (内角 $= \pi/2$)、正五角形 (内角 $= (3/5)\pi$)、正六角形 (内角 $= (2/3)\pi$) の場合は、弱解 u は $H^4(\Omega)$ に属す。

(ii) Ω の内角の最大値 ω が κ を越えると $S_\omega \neq \phi$ で、 ω が大きくなるにつれて、弱解 u の滑らかさは悪くなっていく。特に、 $\omega \rightarrow \pi$ のとき、弱解 u の滑らかさは $\rightarrow \in H^3(\Omega)$ となる。さらに Ω が非凸 ($\omega > \pi$) の場合、一般には $u \in H^3(\Omega)$ は成り立たない。

図6 は以上のことを詳しく示したグラフである。横軸は ω を表し、曲線 $q+2$ は弱解 u の滑らかさを示す。なお、 q は、 $\pi/3 \leq \omega < \kappa$ のとき $q = 2$ 、 $\kappa < \omega < 2\pi$ のとき $q = \min\{-\text{Im}\tau \mid \tau \in S_\omega\}$ により定められる数である。

グラフから予想されるように、次が成り立つ。

定理 1 Ω がどんな多角形領域でも、重調和 Dirichlet 問題 (1) の弱解は 少なくとも $W_2^{5/2}(\Omega)$ には属す。

¹ $H^4(\Omega)$ は、4 回までの微分がすべて Ω の上で 2 乗可積分の関数全体の集合である。

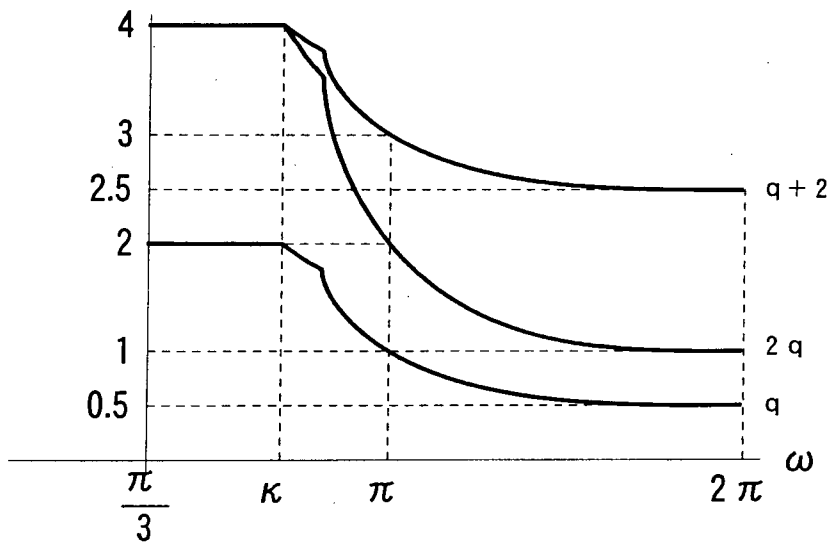


図 6

3 有限要素解の最適な収束の速さ

重調和ディリクレ問題 (1) に対する有限要素近似として、最も簡単な適合有限要素近似 (Bogner-Fox-Schmit rectangle や Argyris triangle 等) を考える。§ 1 で述べた方法は Bogner-Fox-Schmit rectangle という名前のついた有限要素近似である。 h を size parameter、 V_h を ディリクレ境界条件を考慮した有限要素空間、 u_h を有限要素解、即ち、

$$u_h \in V_h \quad \text{かつ} \quad (\Delta u_h, \Delta v_h) = (f, v_h) \quad (\forall v_h \in V_h) \quad (3)$$

を満たすものとする。

このとき、次が成り立つ。

定理 2 問題 (1) の弱解を u 、有限要素解を u_h とするとき、次の評価が成り立つ：

(i) $\pi/3 \leq \omega < \kappa$ の場合：

$$\begin{aligned} \|\Delta(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ (C > 0 \text{ は } h \text{ によらない定数。}) \end{aligned}$$

(ii) $\kappa < \omega < 2\pi$ の場合：

$$\begin{aligned} \|\Delta(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^\alpha \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^\beta \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ (C_\alpha, C_\beta \text{ は } \alpha, \beta \text{ にのみ依存する定数。}) \end{aligned}$$

ただし、 α, β は、それぞれ、 $\alpha < q$ 、 $\beta < 2q$ を満たす任意の定数である。

注意 Ω が正方形領域の場合、(i) より、誤差の L^2 ノルムは $O(h^4)$ である。すなわち、分割が 2 倍細くなると、誤差は約 1/16 に減る。一方、 Ω が図 1 の六角形領域の場合、 $\omega = (3/2)\pi$ で、そのとき $2q = 1.088967\cdots$ である。従って、誤差の L^2 ノルムは $O(h^{1.088967\cdots})$ で、分割が 2 倍細くなると、誤差は半分以下になる。そのようなことを上の定理は主張している。

4 数値計算例

例 1 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$,
 $f(x, y) = 24(x^2(1-x)^2 + y^2(1-y)^2) + 2(2-12x+12x^2)(2-12y+12y^2)$ の場合、(1) の厳密解は $u(x, y) = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ である。

これを、Bogner-Fox-Schmit rectangle を用いて近似解の計算を行った。分割幅 $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ に対して、誤差 $e_h = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ の値は、それぞれ、 $5099.133 \cdot 10^{-10}, 318.5895 \cdot 10^{-10}, 19.84395 \cdot 10^{-10}, 1.178757 \cdot 10^{-10}$ であった。きれいに $O(h^4)$ が出ている。

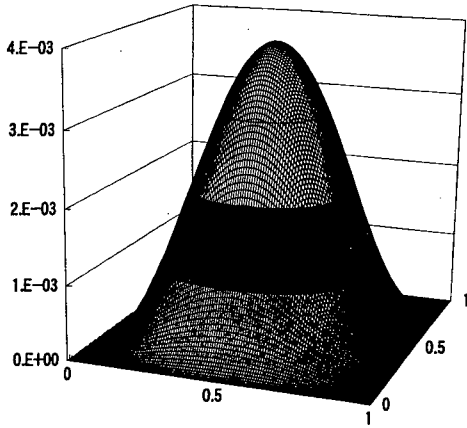
例2 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \setminus [1/2, 1] \times [0, 1/2]$ (Ω の最大内角 $= (3/2)\pi$) , 右辺が $f(x, y) \equiv 1$ の場合も, Bogner-Fox-Schmit rectangle を用いて有限要素解を求めた。この例の場合、厳密解が分からないため、最も細かい2つの分割幅 ($h = 1/32, 1/64$) の有限要素解を補外して得られたものを、仮に真の解とみなして、誤差の計算を行った。分割幅 $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ に対して、誤差 $e_h = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ の値は、それぞれ、 $115.422 \times 10^{-7}, 37.1985 \times 10^{-7}, 16.5879 \times 10^{-7}, 7.57801 \times 10^{-7}, 3.56241 \times 10^{-7}$ であった。 e_{2h}/e_h は、それぞれ、3.10, 2.24, 2.19, 2.13 で、理論値 $2^\beta = 2.12722 \dots$ に近づいている様子が見える。

分割幅を $h = 1/8, 1/64$ としたときの数値計算結果をグラフに示す (図7)。 $h = 1/8$ という粗い近似でも、例1は殆ど厳密解に近く、例2もかなり良い近似であることが見えた。

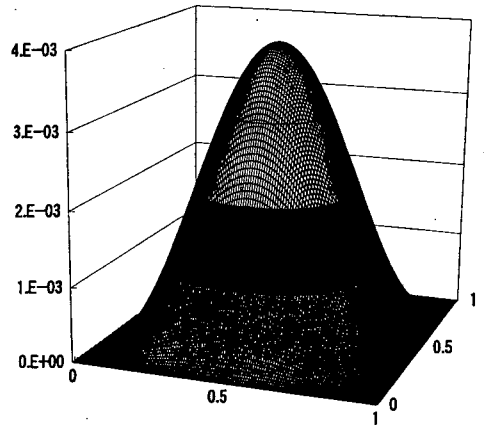
参考文献

- [1] Ciarlet, P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.
- [2] Grisvard, P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [3] Kondratiev, V.A., *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. **16**, 227-313, 1967.
- [4] Lascaux, P. and Lesaint, P., *Some nonconforming finite elements for the plate bending problem*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér R-1, 9-53, 1975.
- [5] Mizutani, A., *On the finite element method for the biharmonic Dirichlet problem in polygonal domains; Quasi-optimal rate of convergence*, preprint.
- [6] Stephan, E., *Conform and mixed finite element schemes for the Dirichlet problem for the bilaplacian in plane domains with corners*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **1**, 354-382, 1979.
- [7] Triebel, H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, 2nd edition, Barth, Heidelberg, Leipzig, 1995.

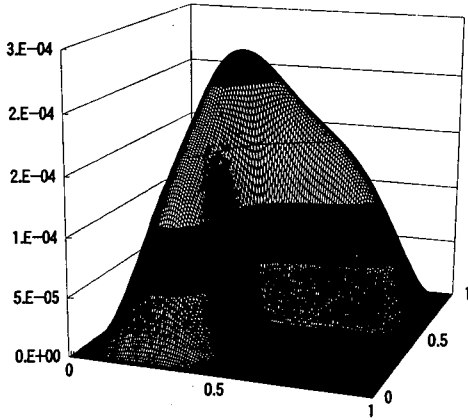
Ex.1 $\Omega=(0,1)*(0,1)$, $\omega=\pi/2$, $n=8$



Ex.1. $\Omega=(0,1)*(0,1)$, $\omega=\pi/2$, $n=64$



Ex.2. $\Omega=\text{hexagon}$, $\omega=3\pi/2$, $n=8$



Ex.2. $\Omega=\text{hexagon}$, $\omega=3\pi/2$, $n=64$

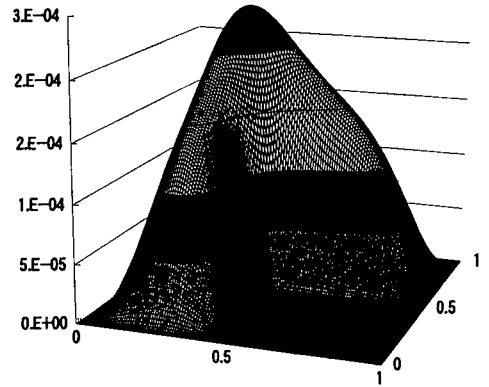


図 7